

Probabilités L3 S6, 2021
Université de Picardie Jules Verne

Cours 6, probabilités L3

Probabilités sur $\mathbb{R}$

Jusqu'à présent nous avons surtout parlé de proba sur des ensembles dénombrables ou finis

Quelques exemples de proba. sur $\mathbb{R}$ que nous avons vus.

(a) mesures de Dirac. $a \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \delta_a$. $A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$F_{\delta_a} : x \mapsto \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(x)$$

(b) proba discrètes. $E \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable, Q proba. sur E
ou P proba sur $\mathbb{R}$. $P(A) = Q(A \cap E)$

Si $E = \{e_i\}_{i \in I}$ I fin ou $= \mathbb{N}$, alors en posant $q_i = Q(\{e_i\})$,

la fonction de répartition F_p de P est :

$$F_p : x \mapsto \sum_{\substack{i \in I \\ t q_i \leq x}} q_i$$

Densités de probabilité

Déf. (densité de proba)

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ est appelée **densité de proba** si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Si f est une densité, on dit qu'une v.a. réelle X a pour densité f si :

$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$ pour tout $a < b$, de manière équivalente,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Remarque. si X a pour densité f , F_X est C^0 et P_X n'a pas d'atome
 $(P_X(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

il existe des probas sur $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de densité, par exemple les probas discrètes, il existe aussi des cas "mixtes"

$E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, $(q_i)_{i \in E} \in (\mathbb{R}_+^*)^E$, f positive intégrable.

$F: x \mapsto \int_{-\infty}^x f(y) dy + \sum_{\substack{i \in E \\ i \leq x}} q_i$ est la fonction de répartition

d'une proba μ n'admettant pas de densité

Exemples . ① loi uniforme sur $[a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$.

c'est la proba μ de densité

$$f \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

② Loi exponentielle de paramètre $a > 0$. c'est la loi de densité

$$f \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a e^{-ax} & \text{sinon} \end{cases}$$

et de fonction de répartition $F \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{sinon} \end{cases}$

③ Loi normale centrée réduite (loi de Gauss). loi de densité $f \cdot x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

En effet, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

on a $I = 2J$, $J = \int_0^{+\infty} f(x) dx$,

$$\begin{aligned} \text{or } J^2 &= \iint_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f(x) f(y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-e^2/2}}_{-(e^{-\frac{e^2}{2}})'} e de}_{1} \end{aligned}$$

$$J^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

Passage en coord. planes.

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (e, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} e \cos \theta \\ e \sin \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \end{aligned}$$

difféomorphisme, or

$$\begin{aligned} \text{Jac } \phi_{(e, \theta)} &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -e \sin \theta \\ \sin \theta & e \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= e \end{aligned}$$

Intégration

Soit $(E, \mathcal{A})$ espace mesurable

Def μ **mesure** si $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ t.q.

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\forall (A_n)_n \in \mathcal{A}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

$\leadsto (E, \mathcal{A}, \mu)$ **espace mesuré**

Def. Une appl $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ est **étagée** si $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{A}$

$\leadsto$ $e \mathcal{A}^+$ est des fonctions étagées positives

$f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est *mesurable* si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Rq: pour que f soit mes il suffit que $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\{f \leq a\} = \{x \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}. \quad \text{ex. } \{ \sup(f, g) \leq a \} = \{f \leq a\} \cap \{g \leq a\}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$.

$$\{ \sup_n f_n \leq a \}$$

$$= \bigcap_{n \geq 0} \{f_n \leq a\}$$

$$\underbrace{\{f_n \leq a\}}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ \forall n \geq 0}} \in \mathcal{A}$$

En particulier, si f, g, f_n sont mesurables, alors

$$- f, \sup(f, g), \inf(f, g), f^+ = \sup(f, 0), f^- = \sup(-f, 0),$$

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n, \lim_n f_n \text{ (si existe)}$$

le sont aussi

$\rightsquigarrow [\mathcal{A}]$: ensemble des fonctions $\mathcal{A}$ -mesurables

$\mathcal{B}\mathcal{A}$: bornées

$\mathcal{A}^+$: à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

Prop. Toute fonction $f \in \mathcal{A}^+$ est limite d'une suite $\nearrow$ de fonctions dans $\mathcal{A}^+$

dém. prenons $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}} + n \mathbb{1}_{\{f(x) \geq n\}}$

Int des fonctions positives

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

Si $f \in \mathcal{A}^+$, $i \in \mathbb{C}$, $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $A_k \in \mathcal{A}$, on pose

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$$

Rqne. indép de l'écriture de f

$\forall f, g \in \mathcal{A}^+$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, $\int (\lambda f + \mu g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \mu \int g d\mu$.

$\forall f, g \in \mathcal{A}^+$, $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Lemme. Si $f_n, g_n \in eA^+$ sont $\uparrow$ et $\lim \uparrow f_n = \lim \uparrow g_n$ on a

$$\lim \uparrow \int f_n d\mu = \lim \uparrow \int g_n d\mu$$

Soit $f \in A^+$ Il existe $(f_n)_n \in (eA^+)^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \uparrow f$
 On a alors $(\int f_n d\mu)_n \uparrow$ et on pose $\int f d\mu = \lim \uparrow \int f_n d\mu$

D'après le lemme préc., cela ne dépend pas de la suite $(f_n)_n$ choisie

En fait $\int f d\mu = \lim \uparrow \sum_{h=0}^{n2^n-1} \frac{h}{2^n} \mu \left(\left\{ x, \frac{h}{2^n} \leq f(x) < \frac{h+1}{2^n} \right\} \right) + n \mu(\{x, f(x) \geq n\})$

Def. f est **intégrable** si $\int f d\mu < +\infty$.

Propriétés. $\forall f, g \in A^+, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+,$
 (passage à la l.m.)

$$\int (\lambda f + \mu g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \mu \int g d\mu \quad (\text{linéarité})$$

et si $f \leq g$, $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

Intégration des fonctions réelles

Def. On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \{ f \in [A] : \int |f| d\mu < +\infty \}$

Si $f \in \mathcal{L}^1$, alors $\overbrace{f^+, f^-}^{\text{positives}}$ sont intégrables, ($f^+ + f^- = |f|$)

et comme $f = f^+ - f^-$, on pose

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Prop. $\mathcal{L}^1$ est un **espace vectoriel**

($0 \in \mathcal{L}^1$ et $\forall f, g \in \mathcal{L}^1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}^1$)

$$|\lambda f + \mu g| \stackrel{IT}{\leq} |\lambda| |f| + |\mu| |g|$$

$f \mapsto \int f d\mu$ est une **forme linéaire positive** sur $\mathcal{L}^1$

$$\left(\forall f, g \in \mathcal{L}^1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int (\lambda f + \mu g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \mu \int g d\mu \right)$$

$$\text{et } \forall f \in \mathcal{L}^1, f \geq 0 \Rightarrow \int f d\mu \geq 0$$

$$\text{En plus, } \forall f, g \in \mathcal{L}^1, f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$$

Propriétés. (propriété vraie presque partout si $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A^c) = 0$ où la p.p.t. est vraie)

$$(i) \quad \forall f \in \mathcal{A}^+ \text{ et } \int f d\mu < +\infty, \quad f < +\infty \text{ p.p.}$$

$$(ii) \quad \forall f \in \mathcal{A}^+ \text{ et } \int f d\mu = 0, \quad f = 0 \text{ p.p.}$$

$$(iii) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1 \text{ et } f \leq g \text{ p.p., } \int f d\mu \leq \int g d\mu$$

$$(iv) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1 \text{ et } A \in \mathcal{A}, f \mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1 \text{ et on pose}$$

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu$$

$$(v) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \forall A \in \mathcal{A}, \int_A f d\mu \geq 0, \text{ alors } f \geq 0 \text{ p.p.}$$

$$(vi) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \forall A \in \mathcal{A}, \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \text{ alors } f \leq g \text{ p.p.}$$

Théorème : ($\mathcal{N}$ monotone, ou de Beppo-Levi)

Y: $(f_n)_n \in (\mathcal{A}^+)^{\mathbb{N}}$ sont $\nearrow$, alors

$$\lim_n \nearrow \int f_n d\mu = \int \lim_n \nearrow f_n d\mu$$

Corollaire : Y: $(g_n)_n \in (\mathcal{A}^+)^{\mathbb{N}}$, alors

$$\sum_n \int g_n d\mu = \int \sum_n g_n d\mu$$

Prop : (lemme de Fatou)

(i) Y: $(f_n) \in (\mathcal{A}^+)^{\mathbb{N}}$, alors $\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$

(ii) Y: $(f_n) \in ([\mathcal{A}])^{\mathbb{N}}$ avec $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq \limsup_n \int f_n d\mu \leq \int \limsup_n f_n d\mu$$

Théorème (de CV dominée de Lebesgue)

⌚ $(f_n)_n \in (\mathcal{L}^1)^{\mathbb{N}}$ et $f_n \rightarrow f$ p.p avec $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$, alors

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Prop I intervalle ouvert, $(f(t, \cdot))_{t \in I}$ famille dans $\mathcal{L}^1$ on pose

$$\phi(t) = \int f(t, x) d\mu(x), \quad \forall t \in I$$

⌚ $\forall x \in A \subset E$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I , et $\forall x \in A$, $\forall t \in I$,
 $\mu(A^c) = 0$ $|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g(x)$, $g \in \mathcal{L}^1$,

alors ϕ est dérivable sur I , et

$$\phi'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int f(t, x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$$

Lien avec l'intégrale usuelle

$$f \in C^0([a, b]) \leadsto F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (\text{usuelle})$$

Posons $G(x) = \int \mathbb{1}_{[a, a+x[} f d\lambda$, $\lambda = \text{lebesgue sur } \mathbb{R}$

On voit que $F(a) = 0$, F est C^0 sur $[a, b]$, et dér. sur $]a, b[$ avec $F' = f$

Facile de vérifier que G a les mêmes propriétés

$$\leadsto F = G \text{ sur } [a, b], \text{ et en fait, } \int_a^b f(t) dt = \int \mathbb{1}_{[a, b[} f d\lambda$$

Encore vrai pour les fonctions C^0 par morceaux on $[a, b]$

3. maintenant $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 par morceaux, t.g. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ CV absolument

$$4. (a_n)_n \downarrow -\infty \text{ et } (b_n)_n \uparrow +\infty, \quad \int_{a_n}^{b_n} |f(t)| dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{D'autre part, } \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} |f| d\lambda \rightarrow \int |f| d\lambda \quad (\text{CV monotone})$$

$$\text{donc } f \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{et } \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f d\lambda \rightarrow \int f d\lambda$$

$$(\text{Thm de CV dominée car } |\mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f| \leq |f| \in \mathcal{L}^1)$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int f d\lambda$$

Mesures de probabilité

Rappel. $(\Omega, \mathcal{A})$ X est une **variable aléatoire réelle (v.a.r.)**
 $\hookrightarrow$ t.t.b.m. si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, i.e., $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Prop si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a.r et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^0 ,
alors $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ est une v.a.r

dém

(★) il suffit de m.g. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{Y \leq a\} = Y^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$,
ou encore que $\{Y \leq a\}^c = \{Y > a\} \in \mathcal{A}$

Mais f étant continue, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ est ouvert

donc $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ pour certains $A_i = \prod_{j=1}^n]x_{i,j}^-, y_{i,j}^+]$
rectangles ouverts

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \{X > a\} &= \{(X_1, \dots, X_n) \in A\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{(X_1, \dots, X_n) \in A_i\} \\
 &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{j=1}^n \underbrace{\{X_j \in A_i\}}_{\substack{\in \mathcal{A} \text{ car } X_j \text{ mesurable}}} \right) \\
 &\quad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\in \mathcal{A}} \\
 &\quad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\in \mathcal{A}}
 \end{aligned}$$

(★) En effet, soit $\mathcal{A}' \in \mathcal{P}(\Omega)$ le tribu engendré par les $\{X > a\}$, $a \in \mathbb{R}$.
 On a vu que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Comme les $] -\infty, a]$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,
 et que X^{-1} commute avec $\cap$, $\cup$ et c , on a bien que
 $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}'$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc X est mesurable. $\blacksquare$

Corollaire $X, Y, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a.n., donc

also $X+Y, XY, \frac{X}{Y}$ (si $Y \neq 0$) $(f: (x,y) \mapsto x+y, xy \text{ etc.})$

$$\sup_{1 \leq n \leq p} X_n, \inf_{1 \leq n \leq p} X_n$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

$$\lim_n X_n \text{ (si existe),}$$

$$\liminf_n X_n, \limsup_n X_n \text{ etc}$$

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}, \left\{ \sup_n X_n > a \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{X_n > a\}}_{\in \mathcal{A}} \right)$$

Sont des v.a.n.

Déf (espérance) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ space probabilisé, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a.n

On dit que X est intégrable ($X \in \mathcal{L}^1$) si $E(|X|) < +\infty$
 $\int_{\Omega} |X| dP$

On dit que $X \in \mathcal{L}^2$ si $X^2 \in \mathcal{L}^1$

Prop. (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si $X, Y \in \mathcal{L}^2$, alors $XY \in \mathcal{L}^1$ et

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

dém $\underbrace{|XY|}_g \leq \underbrace{\frac{X^2 + Y^2}{2}}_d$ car $d - g = \frac{1}{2}(X - Y)^2$

donc $E(|XY|) < +\infty$

De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq E(\underbrace{(\lambda X + Y)^2}_{\geq 0}) &= E(\lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2) \\ &\stackrel{\text{lin}}{=} \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) = P_{X,Y}(\lambda) \end{aligned}$$

$p_{X,Y}(\lambda)$ polynôme du 2nd degré de signe constant $\Rightarrow$ son discriminant $\Delta_{X,Y} \leq 0$

Mais $\Delta_{X,Y} = 4(E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2)$ $\blacksquare$

Déf.. si $X \in \mathcal{L}^2$, on note $V(X) = \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$

$\text{Var}(X)$ est la **variance** de X et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ est son **écart-type**

si $X, Y \in \mathcal{L}^2$, on note $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

$\text{Cov}(X, Y)$ est la **covariance** de X, Y , et alors

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \text{ est le coefficient de corrélation}$$

Lemma. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Cov}(aX+b, a'Y+b') = aa' \text{Cov}(X, Y)$$

• $-1 \leq \rho \leq 1$

dém.
(lim de E)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= E\left(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\right) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - \cancel{E(Y)E(X)} + \cancel{E(X)E(Y)} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX+b, a'Y+b') &= E\left((aX+b)(a'Y+b')\right) - E(aX+b)E(a'Y+b') \\ &= aa'E(XY) + \cancel{ab'E(X)} + \cancel{a'bE(Y)} + \cancel{bb'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (a a' E(X) E(Y) + \cancel{a b' E(X)} + \cancel{a' b E(Y)} + \cancel{b b'}) \\
 & = a a' (E(XY) - E(X) E(Y)) = a a' \operatorname{Cov}(X, Y) \\
 | \rho | &= \frac{|\operatorname{Cov}(X, Y)|}{\sqrt{V(X) V(Y)}} = \frac{|E(XY) - E(X) E(Y)|}{\sqrt{E(X^2) E(Y^2)}} \leq \frac{|E(XY)|}{\sqrt{E(X^2) E(Y^2)}} \leq 1 \quad \square \\
 & \quad \quad \quad \uparrow \\
 & \quad \quad \quad \text{Cauchy-Schwarz}
 \end{aligned}$$

Prop. (ing de Markov / Bienaymé - Tchebicheff)

Let $X \in \mathcal{L}^1$, $a > 0$

Also

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Let $X \in \mathcal{L}^2$, $\sigma^2 = V(X)$, $\forall a > 0$

$$\text{Also } P(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2},$$

$$\text{or } P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

dem. Sei $X \in \mathcal{L}^1$. $|X| = |X| \mathbb{1}_{\{|X| < a\}} + |X| \mathbb{1}_{\{|X| \geq a\}}$

$$\geq a \mathbb{1}_{\{|X| \geq a\}}$$

$$\Rightarrow E(|X|) \geq E(a \mathbb{1}_{\{|X| \geq a\}}) = a P(|X| \geq a)$$

Sei $X \in \mathcal{L}^2$, $X^2 \geq a^2 \mathbb{1}_{\{|X| \geq a\}}$

$$\text{et } E(X^2) \geq a^2 P(|X| \geq a),$$

$$\text{et } P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} \rightarrow V(X)$$



Espaces L^p , moments d'une v.a.

Pour $p \geq 1$, on note $\mathcal{L}^p = \{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ r.v. t.q. } E(|X|^p) < +\infty \}$

on dit que X a un moment d'ordre p

(On ne distinguera pas 2 v.a. égales presque partout et on notera $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$
le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\sim$, où $f \sim g$ si $f = g$ p.p.)

Théorème. (inéq de Minkowski)

$X, Y \in \mathcal{L}^p$, alors $X + Y \in \mathcal{L}^p$, et

$$(E(|X + Y|^p))^{1/p} \leq (E(|X|^p))^{1/p} + (E(|Y|^p))^{1/p}$$

Prop $\forall q \leq p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ ($\Rightarrow \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$)

dém. Soit $q \leq p$, $X \in \mathcal{L}^p$. $|x|^p |x|^{\overset{\leq 0}{q-p}} \leq |x|^p$

$$|X|^q = |X|^q \mathbb{1}_{\{|X| \leq 1\}} + |X|^q \mathbb{1}_{\{|X| > 1\}} \\ \leq 1 + |X|^p$$

$$\Rightarrow E(|X|^q) \leq 1 + E(|X|^p) < +\infty \text{ i.e. } X \in \mathcal{L}^q.$$

Prop Soit X v.a. positive Si $E(X) = 0$, alors $X = 0$ p.p.

dém. D'après Markov, $\forall n \geq 1$, $P\left(X \geq \overset{a}{\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{E(X)}{1/n} = 0$

$$\text{Il ensuit que } P(X \neq 0) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \left(X \geq \frac{1}{n}\right)\right) \leq \sum_{n \geq 1} P\left(X \geq \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

Prop. Soit $X \in \mathcal{L}^2$ Si $V(X) = 0$ alors $X = E(X)$ p.p.
i.e. $P(X = E(X)) = 1$

dém. $V(X) = E\left(\underbrace{|X - E(X)|^2}_{\geq 0}\right) = 0 \Rightarrow |X - E(X)|^2 = 0$ p.p.
 $\Leftrightarrow X = E(X)$ p.p. $\blacksquare$

Théorème (Inégalité de Jensen)

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ 2 intervalles et $\varphi: I \rightarrow J$ une fonction convexe.

Soit $X: \Omega \rightarrow I$ v.a.r. telle que X et $\varphi(X)$ sont dans $\mathcal{L}^1$

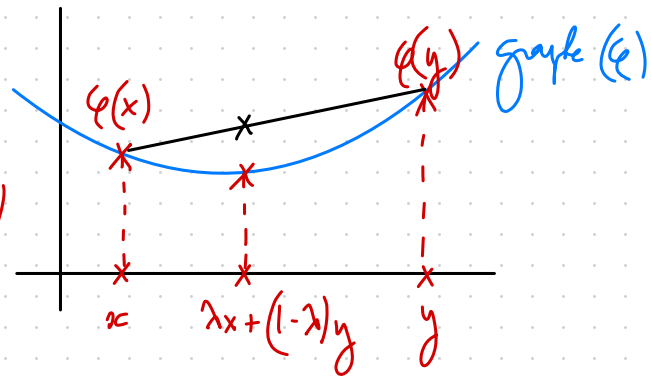
Alors a) $E(X) \in I$

b) $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$

Rappel. φ est convexe si son graphe est convexe

$$\forall x, y \in I$$

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$



dém. a) Soient $\underbrace{a}_{\in [-\infty, +\infty]} = \inf_{\substack{\cap \\ [-\infty, +\infty]} I}, \quad \underbrace{b}_{\in [-\infty, +\infty]} = \sup_{\substack{\cap \\ [-\infty, +\infty]} I}, \quad m = E(X)$

$\forall \omega \in \Omega, \quad a \leq X(\omega) \leq b$ donc par encadrement de l'espérance, $a \leq \overbrace{E(X)}^m \leq b$

Mq si I est ouvert en a , $m > a$ et si I est ouvert en b , $m < b$ d'où $m \in I$

Si $|a|$ ou $|b| = +\infty$ alors il n'y a rien à montrer car m est fini

Supposons a fini et I ouvert en a , et m.q. $m > a$

En effet, si $m = a$, alors $Y = X - a$ est une v.v. positive et $E(Y) = 0$
 $= E(X - a) = m - a$

donc $Y = 0$ p.p., i.e., $P(X=a) = 1$ mais c'est impossible car $X(\Omega) \subset I$
et $a \notin I$

Idem pour b On a donc que $E(X) \in I$

b) Comme $E(X) \in I$ on peut lui appliquer φ

La fonction φ est convexe donc pour $m = E(X)$, il existe une droite $\Delta: y = ax + b$ passant par $(m, \varphi(m))$ située entièrement sous le graphe de φ ,

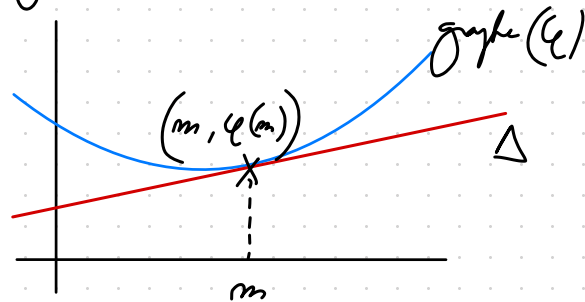
$$\text{i.e., } \varphi(x) - \varphi(m) \geq (ax+b) - \underbrace{(am+b)}_{\varphi(m)},$$

$$\text{soit } \varphi(x) \geq a(x-m) + \varphi(m), \quad \forall x \in I$$

Donc pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(X(\omega)) \geq a(X(\omega) - m) + \varphi(m)$

et par linéarité de $\int$,

$$E(\varphi(X)) \geq E(a(X-m) + \varphi(m)) = a \overbrace{E(X-m)}^m + \varphi(m) = \varphi(m) = \varphi(E(X))$$



Formule de transfert

$$\begin{aligned} (\Omega, \mathcal{A}, P) \quad , \quad & X : \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E}) \quad \text{v.a.} \\ & h : (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{v.a.n.} \end{aligned}$$

Alors $h \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une v.a.n. ; de plus

Prop. On a $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, P_X)$ ssi $h \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Dans le cas où $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, P_X)$ on a

$$\begin{aligned} \underbrace{E(h \circ X)}_{\text{espérance par } P} &= \underbrace{E(h)}_{\text{espérance par } P_X} \\ &= \int_{\Omega} (h \circ X) \, dP &= \int_E h \, dP_X \end{aligned}$$

dém. Si $h = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{E}$, alors

$$h \circ X(x) = \mathbb{1}_B \circ X(x) = \mathbb{1}_{\{X \in B\}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (h \circ X) dP &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X \in B\}} dP = P(X \in B) = P_X(B) = \int_E \mathbb{1}_B dP_X \\ &= \int_E h dP_X \end{aligned}$$

Si h est étagée, alors cela découle de l'observation précédente
et de la linéarité de l'intégrale

- Si h est mesurable et positive, on l'approche par des fonctions h_n étagées ≥ 0 , avec $(h_n)_n \nearrow h$, et alors par le théorème de CV monotone,

$$\int h \circ X dP = \lim \nearrow \int h_n \circ X dP = \lim \nearrow \int h_n dP_X = \int h dP_X$$

Si $h \in \mathcal{L}^1$, alors

$$h = h^+ - h^-$$

$$\begin{aligned}
 \int h \circ X \, dP &= E(h^+ \circ X) - E(h^- \circ X) & \begin{pmatrix} \text{form } P \\ \text{form } P_X \end{pmatrix} \\
 &= E(h^+) - E(h^-) \\
 &= E(h) = \int h \, dP_X
 \end{aligned}$$

Exemples. ① X discrète, i.e. E dénombrable

Dans ce cas on retrouve bien la formule déjà vue

$$E(h) = \int_E h \, dP_X = \sum_{x \in E} h(x) P_X(\{x\}) = \sum_{\omega \in \Omega} h \circ X(\omega) P(\{\omega\}) = \int_{\Omega} h \circ X \, dP = E(h \circ X)$$

(la loi P_X est déterminée par la famille $\{P_X(x)\}_{x \in E}$)

② X v.a. à densité f , i.e. $P(X \in B) = \int_B f \, d\lambda$
 $\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_{\mathbb{R}} f \, \mathbb{1}_B \, d\lambda$

Alors $\forall h : E \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{L}'$,

$$E(h \circ X) = \int_E h \, \underbrace{dP_X}_{f d\lambda} = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) d\lambda(x).$$

Calcul de loi

Soit X v.a.n de densité f_X

Soit g une fonction t.q. $Y = g(X)$

Soit aussi une v.a., soit - ce que Y admet aussi une densité, et si oui, comment la calculer?

Remarques. densité n'existe pas toujours

Exemple : si $g(x) = a$ pour tous x , alors la loi de Y est δ_a = dirac en a , sans densité

si densité existe, l'idée est de mettre $E(h(Y)) = E(h \circ g(X))$

Soit la forme $\int h(y) f_Y(y) dy$ pour une fonction convenable f_Y , et alors f_Y sera la densité cherchée

Les formules vues plus haut (formule de transfert) disent que

$$E(h \circ g(X)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{h \circ g(x)}_{h(y)} f_X(x) d\lambda(x) \quad \hookrightarrow (\text{on } dx)$$

donc l'idée est de faire un changement de variable $y = g(x)$ dans cette intégrale

Rappel : formule du changement de variable dans $\mathbb{R}^d$

si $\phi : U \rightarrow V$ difféo de l'ouvert U sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\forall f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable, } \int_V f(v) dv = \int_U f \circ \phi(u) |J(\phi)(u)| du$$

$J(\phi)$ est le déterminant de la matrice jacobienne (matrice des $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$)
($J(\phi)(u) = [J(\phi^{-1})(\phi(u))]^{-1}$)

Exemples.

① X v.a.n de densité $f_X : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (loi de Cauchy)

Soit $Y = e^X$ Loi de Y ? ($Y = g(X)$, $g = \exp$)

Soit $h \in C^k$ positive arbitraire

$$E(h(Y)) = E(h \circ g(X)) = \int_{\mathbb{R}} h \circ \underbrace{g(x)}^y f_X(x) dx$$

$$\begin{array}{l} g \\ x \mapsto e^x = y \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \text{difféo} \end{array}$$

$$\begin{aligned} dy &= d(e^x) = e^x dx \\ \text{et } dx &= \frac{1}{e^x} dy = \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(y) \overset{\log y}{f_X(g^{-1}(y))} \frac{1}{y} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(y) \frac{1}{\pi(1+(\log y)^2)} \times \frac{dy}{y} = \int_{\mathbb{R}_+} h(y) \underbrace{\left[\frac{1}{\pi y(1+(\log y)^2)} \right]}_{f_Y(y)} dy$$

donc Y a pour densité f_Y .

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$y \longmapsto \frac{1}{\pi y(1+(\log y)^2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

② $g: x \mapsto ax+b$ $a \neq 0$ $Y = g(X) = aX + b$

$$E(h(Y)) = E(h \circ g(X)) = \int_{\mathbb{R}} h \circ g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(\underbrace{ax+b}_y) f_X(x) dx$$

$g: x \mapsto ax+b$ diff'ble de $\mathbb{R}$ ($a \neq 0$)
 $dy = a dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(y) f_X(\underbrace{g^{-1}(y)}_{\frac{y-b}{a}}) \frac{dy}{a} = \int_{\mathbb{R}} h(y) \underbrace{\left[\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \right]}_{f_Y(y)} dy$$

ex si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$\mathcal{N}(0, 1) \xrightarrow{aX+b} \mathcal{N}(b, a^2)$

uniforme sur $[\alpha, \beta] \xrightarrow{aX+b}$ uniforme sur $[a\alpha+b, a\beta+b]$

③ Coordonnées polaires

Soit U, V deux v.a. et $X = (U, V)$.

Soit $Y = (R, \Theta)$ ses coordonnées polaires, i.e. $Y = g(X)$, où

$$g^{-1}(r, \theta) = \left(\underbrace{r \cos \theta}_u, \underbrace{r \sin \theta}_v \right)$$

On a que $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[\times]0, 2\pi]$ est big et C^∞ ,

et $J(g^{-1})(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

$$\begin{aligned}
 E(h(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} h(\overbrace{g(u,v)}^{(r,\theta)}) f_X(u,v) \, du \, dv \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} h(r,\theta) f_X(r \cos \theta, r \sin \theta) \left(\overbrace{J(g^{-1})}^r(r,\theta) \right) dr \, d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} h(r,\theta) \underbrace{\left(r f_X(r \cos \theta, r \sin \theta) \mathbb{1}_{]0, \infty[\times]0, 2\pi]}_{f_Y(r,\theta)} \right) dr \, d\theta
 \end{aligned}$$

④

X v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ $Y = g(X)$, $g: x \mapsto x^2$

Pour la fonction C^k positive arbitraire, on a

$$E(h(Y)) = E(h(X^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

⚠ $x \mapsto x^2 \rightarrow$ pas une bij de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$ Mais

$$E(h(Y)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{h(x^2)}_y e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} h(y) e^{-\frac{y}{2}} \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$dy = d(x^2) = 2x dx$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

donc Y pour densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{\sqrt{y}} 1_{\mathbb{R}_+}(y)$